Предельная теорема для случайного блуждания с катастрофами

Логачев Артем, Логачева О.М., Неклюдова В.Л., Руссиян С.А., Хрущев С.Е.

6 декабря 2018 г.

Рассмотрим цепь Маркова $\eta(k)$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+ = \{0\} \cup \mathbb{N}$, с фазовым пространством $\mathbb{Z}^+$. Переходные вероятности которой имеют вид

$$\mathbf{P}(\eta(k+1) = j | \eta(k) = i) = \begin{cases} \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \text{ если } j = i+1, \\ \frac{\mu}{(\lambda+\mu)} \mathbf{P}_{ij}, \text{ если } 0 \le j < i, i \neq 0, \\ 1, \text{ если } j = 1, i = 0, \end{cases}$$

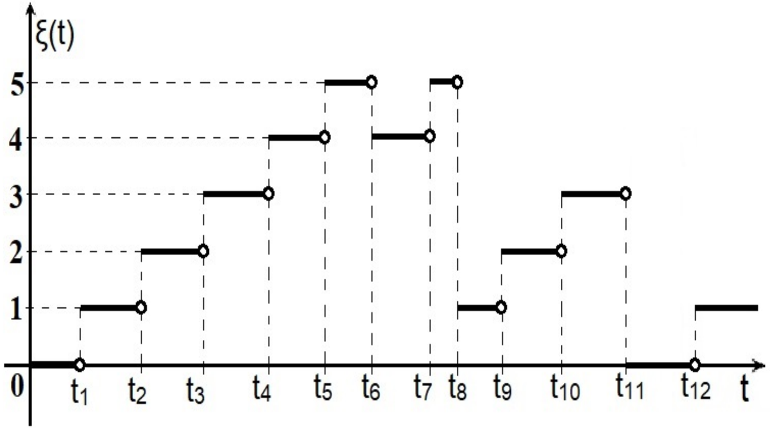
где λ и μ – положительные константы, $\mathbf{P}_{ij} > 0$, $\sum\limits_{j=0}^{i-1} \mathbf{P}_{ij} = 1$, для всех $i \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}$, найдется константа $\Delta > 1$ такая, что

$$\frac{\Delta}{i} \le \mathbf{P}_{ij} \le \frac{1}{\Delta i}.$$

Положим $\eta(0) = 0$. Пусть пуассоновский случайный процесс $\nu(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$ с параметром $\mathbf{E}\nu(t) = \alpha t$ не зависит от цепи $\eta(\cdot)$. Определим случайный процесс

$$\xi(t) := \eta(\nu(t)), \ t \in \mathbb{R}^+.$$

Типичная траектория процесса $\xi(t)$



Нас будет интересовать предельное поведение семейства процессов

$$\xi_T(t) := \frac{\xi(Tt)}{T^b}, \ \ t \in [0,1],$$

где T – параметр, который неограниченно возрастает, $b > 0$ – фиксированная константа.

Теорема. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\left(\lim_{T\to\infty} \sup_{t\in[0,1]} \xi_T(t) > \varepsilon \right) = 0.$$

Таким образом, случайная функция $f(T) = \sup\limits_{t\in[0,1]} \xi(Tt)$ растет медленнее чем любая степенная функция T^b, где $b > 0$.


That's all Folks!