

УДК 311.13

**В.Н. Афанасьев**, доктор экономических наук, профессор, заведующий кафедрой статистики и эконометрики, ФГБОУ ВО «Оренбургский государственный университет»  
e-mail: vafanassyev@gmail.com

**А.В. Елагина**, кандидат экономических наук, ведущий экономист сектора банковского надзора, отдела банковского надзора ЦБ РФ по Оренбургской области  
e-mail: annn888@mail.ru

### АГРЕГИРОВАНИЕ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ВОЛАТИЛЬНОСТИ ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ ТРЕНДАХ

*В статье рассматривается методика агрегирования волатильности производственных показателей при нелинейных трендах отдельных совокупностей с целью создания устойчивой совокупности в целом. Логическая сущность задачи заключается в том, что колебания изучаемого признака у разных единиц совокупности частично обусловлены общими признаками, а частично – разными, независимыми признаками, следовательно, колебания (волатильность) частично могут быть согласованными по величине и во времени, а частично – несогласованными. В таком случае, при агрегировании, то есть переходе к совокупности в целом, как правило, следует ожидать, что колебания агрегированного признака совокупности будут меньше, чем колебания в среднем для единиц совокупности (средние показатели колебаний у единиц совокупности). При этом, конечно, найдутся и такие единицы совокупности, для которых волатильность (колеблемость) меньше, чем в целом по совокупности, поскольку и показатели колеблемости (волатильности) внутри совокупности варьируют. Агрегирование снижает лишь среднюю величину колебаний, а значит повышает устойчивость признака. Проведенное исследование агрегирования волатильности (изменчивости) позволяет с уверенностью отметить ее снижение в совокупности, что имеет как научную, так и практическую значимость, например, в системе государственного регулирования агропродовольственного рынка.*

**Ключевые слова:** агрегирование волатильности, нелинейные тренды, агропродовольственный рынок, эффект агрегирования волатильности.

Агрегирование показателей волатильности (колеблемости) в целях создания, например, устойчивого агропродовольственного рынка на региональном и межрегиональном уровнях требует теоретического обоснования статистической проблемы соотношения волатильности и устойчивости уровней у отдельных единиц совокупности и для совокупности в целом. Наша методика применима для любых показателей – производительности, себестоимости, прибыли, рентабельности, продуктивности, урожайности, различных совокупностей. Это может быть совокупность личных подсобных хозяйств, фермерских хозяйств, муниципальных образований в области, областей в крупном регионе и регионов в РФ, государств в мире. Исследование основывалось на работах В.Н. Афанасьева [1, 2, 3], Я.Я. Вайну [5], Т.И. Гуляевой [6], Т.В. Лебедевой [7], Н.С. Четверикова [8], Е.М. Четыркина [9], М.М. Юзбашева [10].

Различие между устойчивостью производства в крупном регионе и в отдельных административных районах, тем более в отдельных предприятиях, вовсе не сводится к чисто математическому соотношению. Вместе с тем, поскольку такое существует, его необходимо выделить, изучить, измерить, чтобы отделить это формально-математическое свойство от социальных, экономических, технологических факторов, которые могут по-разному влиять на повышение (или даже на снижение) устойчивости

конкретных показателей в конкретной совокупности.

Таким образом, когда мы предложили эту методику, то вовсе не сводили проблему устойчивости производственных характеристик на высоком уровне (совокупность, регион, страна) к чисто математической проблеме частичного погашения колебаний при агрегировании единиц совокупности (организаций, регионов, областей) [2, 3]. Сначала было предположено, что колебания изучаемого признака у всех единиц совокупности одинаковы по силе и строго единообразны во времени: уровни одновременно по всем единицам совокупности и поровну отклоняются от тренда вверх или вниз. Очевидно, что в таком крайнем случае никакой проблемы не существует: колебания признака в целом по совокупности точно равны колебаниям по каждой ее единице, а значит устойчивость уровней признака в совокупности в целом равна устойчивости в отдельных единицах этой совокупности.

Такого не может быть! Возразит любой экономист, специалист управленец, и он будет прав. В этом-то и состоит проблема, что крайне маловероятно строго согласованное и равное по всем единицам совокупности колебание какого-либо признака. Кроме общих причин, факторов, более или менее (но и то не точно одинаково) влияющих сразу на все единицы совокупности, то есть «макрофакторов», неизбежно есть и индивидуальные, особые

для каждой единицы совокупности причины колебаний («микрофакторы»), действие которых не согласовано и даже вовсе независимо для разных единиц совокупности.

Для волатильности урожайности сельскохозяйственных культур, например, макрофакторами для совокупности хозяйств административного района служат: температура воздуха, сумма осадков, которые внутри административного района колеблются одинаково; микрофакторами – нарушения агротехники в отдельных хозяйствах, применение отдельных агротехнических приемов, разное качество управления и организации производства, колебания финансового состояния хозяйства. А для крупного региона температура воздуха и сумма осадков уже не будут одинаковыми для составляющих этот регион областей и зон, вместе с тем макрофакторами колебаний финансовых показателей будут общие для страны изменения (колебания) ставок кредитования, налогов, рыночных цен, инфляция, дотации и тому подобное.

Итак, логическая сущность задачи заключается в том, что колебания изучаемого признака у разных единиц совокупности частично обусловлены общими признаками, а частично – разными, независимыми признаками, следовательно, колебания частично могут быть согласованными по величине и во времени, а частично – несогласованными. В таком случае, при агрегировании, то есть переходе к совокупности в целом, как правило, следует ожидать, что колебания агрегированного признака совокупности будут меньше, чем колебания в среднем для единиц совокупности (средние показатели колебаний у единиц совокупности). При этом, конечно, найдутся и такие единицы совокупности, для которых волатильность (колеблемость) меньше, чем в целом по совокупности, поскольку и показатели колеблемости (волатильности) внутри совокупности варьируют. Агрегирование снижает лишь среднюю величину колебаний, а значит повышает устойчивость признака.

Этот логический вывод полностью согласуется с положениями теории систем о том, что система не сводится к простой сумме составляющих ее единиц, поскольку взаимодействие элементов системы порождает новое качество – «системный эффект» («emergency»). Крупные системы, как правило, устойчивее мелких систем.

Перейдем к статистической постановке задачи. Имеется: совокупность из « $K$ » единиц, для каждой из которых определен признак « $y$ » по данным за « $n$ » лет (например: валовый сбор зерна за  $n$  лет по  $K$  хозяйствам). Тренды по каждому хозяйству  $\tilde{y}_j$  ( $j=1\dots K$ ), оценки среднего квадратического отклонения от тренда для каждой единицы совокупности  $S_{y_j}(t)$ , суммарная величина признака для совокупности за каждый год:

$$y_{совj} = \sum_{j=1}^k y_{ji} \quad (1),$$

ее тренд  $\tilde{y}_{сов}$  и среднее квадратическое отклонение (также оценка с учетом степеней свободы колебания)  $S_{y_{сов}}(t)$ .

Спрашивается: как выразится тренд признака в совокупности через тренд для каждой ее единицы? Как выразится среднее квадратическое отклонение признака в совокупности через таковые для ее единиц?

В данной работе рассматриваются параболические тренды (параболы второго порядка вида  $\tilde{y} = a + bt + ct^2$ ), линейные тренды рассмотрены ранее [2, 4]. Всякий линейный тренд можно рассматривать как параболу второго порядка с нулевым ускорением, то есть для нее  $C_i = 0$ .

Приводим вывод формулы, связывающей показатели колеблемости (волатильности) совокупности и ее единиц в общем виде для « $K$ » единиц совокупности, опирающиеся на ранее доказанное свойство суммирования трендов [2]:

$$\text{Имеем: } Y_i = \sum_{j=1}^k y_{ij}; \quad \bar{Y}_i = \sum_{j=1}^k \tilde{y}_{ij}, \text{ то есть для каждо-}$$

го года и фактический уровень признака в целом по совокупности является суммой фактических значений признаков всех ее единиц, и выровненный уровень тренда для совокупности в целом также есть сумма уровней трендов для данного года по всем единицам совокупности. Отсюда следует, что и отклонение фактического уровня по совокупности от тренда является суммой отклонений фактических уровней трендов по всем единицам совокупности то есть

$$U_i = \sum_{j=1}^k U_{ij}. \quad (2).$$

Из (2) следует, что:

$$\sum_{i=1}^n U_i^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^k U_{ij} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \left( \sum_{j=1}^k U_{ij}^2 + 2 \sum_{j=1}^{C_i^2} U_{im} \times U_{ip} \right). \quad (3).$$

$$m, p \in j; m \neq p.$$

Смысл правой части (3) таков: сумма квадратов отклонений от тренда по совокупности в целом равна сумме по годам (по  $i$ ) сумм по единицам совокупности квадратов отклонений от трендов по всем годам и всем единицам совокупности плюс удвоенная сумма произведений отклонений от трендов по всем возможным парам единиц совокупности и по годам. Это общая формула квадрата сумм многих (« $K$ ») слагаемых. Она состоит из « $K$ » квадратов и числа сочетаний из « $K$ » по два удвоенных произведений. Через « $m$ » и « $p$ » обозначены отклонения от трендов у « $m$ »-ной и « $p$ »-той единиц совокупности,  $m$  и  $p$  пробегает значения от 1 до « $K$ », но  $m \neq p$ . Число сочетаний из « $K$ » по 2, напомним, равно  $\frac{k!}{(k-1)! \times 2!}$ .

Произведения отклонений от трендов для раз-

ных единиц совокупности – это ковариация отклонений от трендов, которая является числителем парных коэффициентов корреляции между отклонениями от трендов:

$$r_{U_m U_p} = \frac{\sum_{i=1}^n U_{mi} U_{pi}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n U_{mi}^2 \times \sum_{i=1}^n U_{pi}^2}}, \quad (4)$$

отсюда:

$$\sum_{i=1}^n U_{mi} U_{pi} = r_{U_m U_p} \sqrt{\sum_{i=1}^n U_{mi}^2 \times \sum_{i=1}^n U_{pi}^2}. \quad (5)$$

Рассмотрим теперь наш основной объект анализа – оценки средних квадратических отклонений от

$$\sum_{i=1}^n U_{mi} \times U_{pi} = r_{U_m U_p} \sqrt{\sum_{i=1}^n (n-3) S_{y_m}(t) \times (n-3) S_{y_p}(t)} = (n-3) \times S_{y_m}(t) \times S_{y_p}(t) \times r_{U_m U_p} \quad (6)$$

Все полученные выражения сумм квадратов отклонений через средние квадратические отклонения (6) подставляем в (3):

$$(n-3) \times S_Y^2(t) = \sum_{j=1}^k (n-3) \times S_{y_j}^2(t) + 2 \sum_{j=1}^{C_k^2} r_{U_m U_p} \times (n-3) \times S_{y_m}(t) \times S_{y_p}(t)$$

Сократив обе стороны на  $(n-3)$  имеем:

$$S_Y^2(t) = \sum_{j=1}^k S_{y_j}^2(t) + 2 \sum_{j=1}^{C_k^2} S_{y_m}(t) \times S_{y_p}(t) \times r_{U_m U_p} \quad (7)$$

Формула (7) является окончательным результатом, выражающим связь между величиной колеблемости (волатильности) признака по совокупности в целом и колеблемостью (волатильностью) его по отдельным единицам совокупности.

Дисперсия колебаний признака в целом по совокупности из « $K$ » единиц равна сумме дисперсий по всем  $K$  единицам совокупности плюс удвоенная сумма всех сочетаний из « $K$ » по 2 произведения пар средних квадратических отклонений на парные коэффициенты корреляции колебаний

Если все колебания признака у разных единиц совокупности были бы не связаны друг с другом (не содержали общих факторов, а случайные колебания погашались бы в бесконечно большой совокупности), тогда все коэффициенты корреляции отклонений от трендов были бы равны нулю, а дисперсия признака в совокупности была бы равна сумме дисперсий ее единиц.

При отсутствии связи колебаний, но в ограниченной совокупности коэффициенты корреляции колебаний будут незначимо отличны от нуля, а дисперсия признака в совокупности незначимо отличаться от суммы дисперсий ее единиц.

Если преобладает прямая связь колебаний, то есть имеются общие их факторы, то коэффициенты корреляции отклонений будут больше нуля, но меньше единицы, а дисперсия в целом по совокупности больше суммы дисперсий у ее единиц, но меньше суммы средних квадратов (так как второе

трендов, то есть абсолютные показатели колеблемости (волатильности):

Для совокупности в целом, при параболическом второго порядка тренде:

$$S_Y(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n U_i^2}{n-3}}, \text{ откуда } \sum_{i=1}^n U_i^2 = (n-3) \times S^2 Y(t)$$

Для каждой единицы совокупности:

$$S_{y_i}(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n U_{ij}^2}{n-3}}, \text{ откуда } \sum_{i=1}^n U_{ij}^2 = (n-3) \times S_{y_{ij}}^2(t)$$

Равенство (4) можно переписать в виде:

слагаемое (7) меньше удвоенной суммы произведений!):

$$S_Y^2(t) < \left[ \sum_{j=1}^k S_{y_j}(t) \right]^2, \text{ т.е. } S_Y^2(t) < n \times S_Y^2(t).$$

Если же преобладает обратная связь колебаний у единиц совокупности (случай агрегирования в совокупности районов с противоположными колебаниями или культур с противоположными колебаниями), тогда дисперсия колеблемости (волатильности) по совокупности в целом будет меньше суммы дисперсий у ее единиц, так как коэффициенты корреляции по преимуществу будут отрицательными (и значимо отличными от нуля), и все второе слагаемое правой части (7) будет отрицательной величиной. Так будет измерен эффект размещения федеральных заказов и квот в районах с противоположными колебаниями производства зерна, мяса и молока на душу населения [2].

Рассмотрим эффект агрегирования при нелинейных трендах на примере производства мяса на душу населения в Оренбургской и Самарской областях за тридцать лет (два пятнадцатилетних периода) – 1976–1990 и 1991–2005 годы [3].

Нелинейность производства мяса явно прослеживается за второй период (1991–2005 годы).

Обозначим производство мяса на душу населения в Оренбургской области –  $y_1$ , в Самарской области –  $y_2$ , ряды динамики даны за 15 лет, тренды параболические.

Тренды по единицам совокупности с 1976 по 1990 год – парабола второго порядка:

$$\tilde{y}_i = 82,14 + 1,571 \times t_i + 0,2653 \times t_i^2,$$

$$\tilde{y}_i = 53,87 + 1,8179 \times t_i + 0,0816 \times t_i^2$$

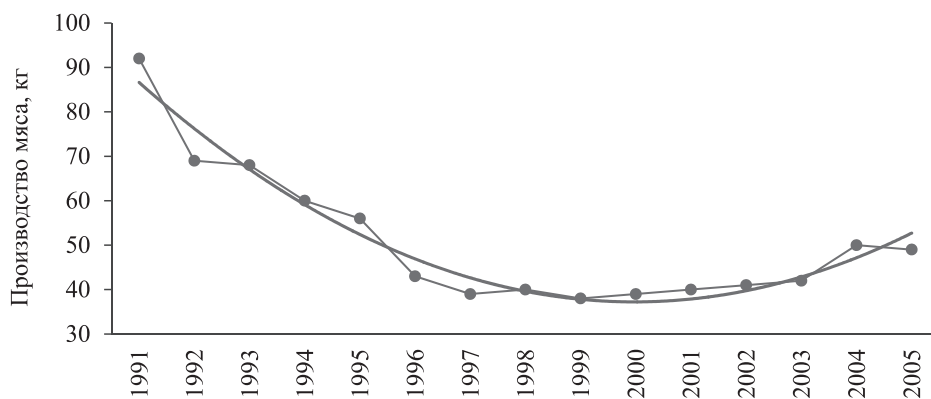


Рисунок 1. Производство мяса на душу населения в Самарской области за 1976–1990 годы

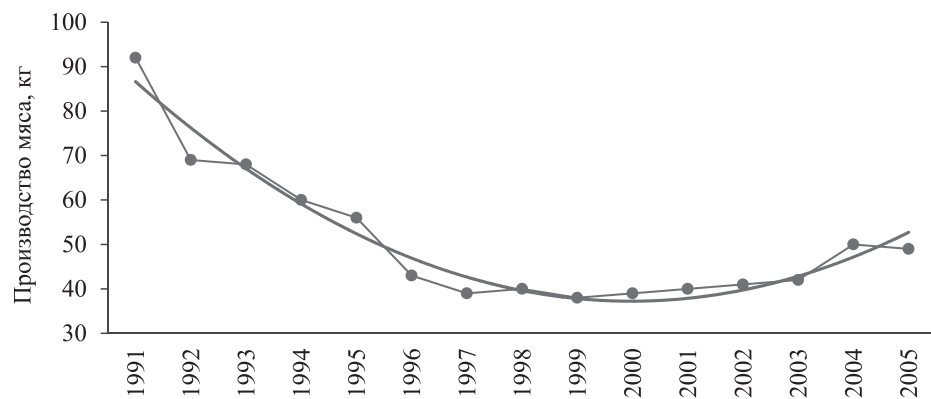


Рисунок 2. Производство мяса на душу населения в Оренбургской области за 1976–1990 годы

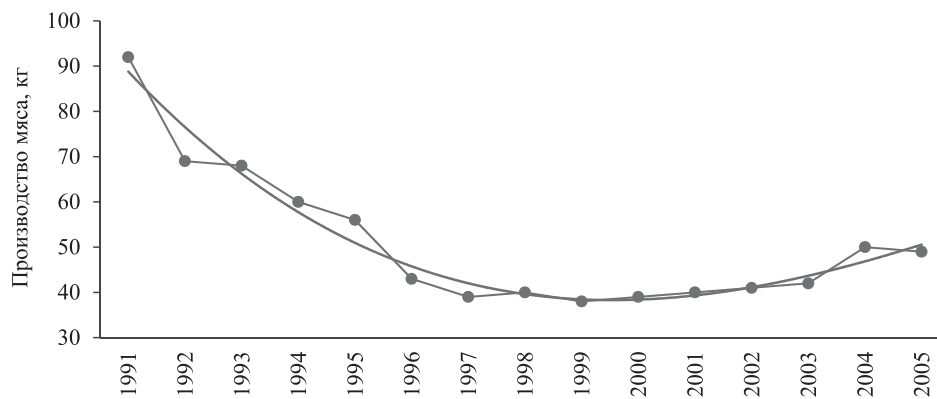


Рисунок 3. Производство мяса на душу населения в Самарской области за 1991–2005 годы

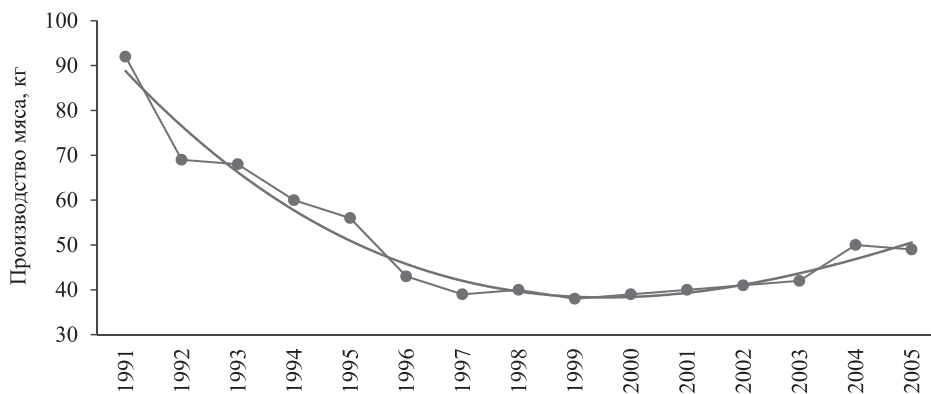


Рисунок 4. Производство мяса на душу населения в Оренбургской области за 1991–2005 годы

средние уровни:  $\bar{y}_1 = 87,1\dots$ ;  $\bar{y}_2 = 55,4\dots$ ;  
 $\bar{y}_{COB} = 142,5\dots$

Вычислим параметры тренда по совокупности по ее ряду динамики:

$$b_c = \frac{\sum y_A t_i}{\sum t_i^2} = \frac{949}{280} = 3,389, \text{ что равно } b_1 + b_2.$$

С помощью МНК рассчитаем параметры «а» и «с»:

$$15a + 280c = 2137$$

$$280a + 9352c = 41341$$

$$a_c + 18,7\dots c_c = 142,5$$

$$a_c + 34,4c_c = 147,6$$

$$\text{отсюда: } 14,7\dots c_c = 5,1$$

$$c_c = 0,3469, \text{ что равно } c_1 + c_2$$

$$a_c = 136, \text{ что равно } a_1 + a_2$$

Итак, тренд по совокупности в целом есть сумма трендов по ее единицам:

$\tilde{y}_c = 136 + 3,389 \times t_i + 0,3469 \times t_i^2$ , как требует теория.

Рассмотрим меры колеблемости (волатильности) и устойчивости:

По единицам совокупности:

$$S_y(t)_1 = \sqrt{\frac{1939}{15-3}} = 12,7 \text{ кг};$$

$$S_y(t)_2 = \sqrt{\frac{169}{15-3}} = 3,8 \text{ кг};$$

$$\vartheta_y(t)_1 = \frac{S_y(t)_1}{\bar{y}_1} = 14,6\% ;$$

$$\vartheta_y(t)_2 = \frac{S_y(t)_2}{\bar{y}_2} = 6,9\% ;$$

Если из этих коэффициентов колеблемости (волатильности) вычислить среднюю взвешенную на знаменатели, то есть на  $\bar{y}$ , имеем:

$$\vartheta_y(t)_j = \frac{\sum_{j=1}^2 \vartheta_y(t)_j \times \bar{y}_j}{\sum_{j=1}^2 \bar{y}_j} = 11,6\% .$$

Прямое вычисление по совокупности в целом:

$$S_y(t)_A = \sqrt{\frac{2746}{15-3}} = 15 ; \vartheta_y(t)_A = \frac{S_y(t)_A}{\bar{y}_A} = 10,5\% .$$

Вычисление по формуле 19 через колеблемость (волатильность) единиц совокупности:

$$S_y^2(t)_A = 12,7^2 + 3,8^2 + 2 \times 12,7 \times 3,8 \times 0,5 = 223,99.$$

$$S_y(t)_c = 15$$

то есть точно совпадает с прямым расчетом, где

$$(r_{интп} = \frac{289}{\sqrt{327691}} = 0,5) \text{ связь колебаний прямая,}$$

средняя.

Коэффициент колеблемости (волатильности) по совокупности в целом на 1,1 пункта (или на 9,5 %) ниже, чем средняя из коэффициентов колеблемости (волатильности) по единицам совокупности.

В примере средний показатель устойчивости уровней по единицам совокупности (взвешенный) равен 100 % - 11,6 % = 88,4 %, а показатель устойчивости уровней по совокупности в целом составил 100 % - 10,5 % = 89,5 %, то есть на 1,1 (или на 1,2 %) пункта выше. Различия в колеблемости (волатильности) и в устойчивости в «пунктах» одинаково по абсолютной величине, но могут быть противоположны по знаку, а в показателях темпов изменения в процентах, разумеется, разные, так как темпы исчисляются к разным базам.

Тренды по единицам совокупности за 1991–2005 годы также парабола второго порядка:

$$\tilde{y}_i = 37,9 - 2,37 \times t_i + 0,653 \times t_i^2 ;$$

$$\tilde{y}_i = 28,55 - 2,175 \times t_i + 0,3878 \times t_i^2$$

средние уровни:  $\bar{y}_1 = 50,1\dots$ ;  $\bar{y}_2 = 35,8\dots$ ;  
 $\bar{y}_{COB} = 85,9\dots$

Вычислим параметры тренда по совокупности по ее ряду динамики:

$$b_c = \frac{\sum y_A t_i}{\sum t_i^2} = \frac{-1273}{280} = -4,546, \text{ что равно } b_1 + b_2$$

С помощью МНК рассчитаем параметры «а» и «с»:

$$15a + 280c = 1289$$

$$280a + 9352c = 28341$$

$$a_c + 18,7\dots c_c = 85,9$$

$$a_c + 34,4c_c = 101,2$$

$$\text{отсюда: } 14,7\dots c_c = 15,3$$

$$c_c = 1,041, \text{ что равно } c_1 + c_2$$

$$a_c = 66,4, \text{ что равно } a_1 + a_2$$

Итак, тренд по совокупности в целом есть сумма трендов по ее единицам:

$\tilde{y}_c = 66,4 - 4,546 \times t_i + 1,041 \times t_i^2$ , как требует теория.

Рассмотрим меры колеблемости (волатильности) и устойчивости за период с 1991 по 2005 год.

По единицам совокупности:

$$S_y(t)_1 = \sqrt{\frac{142}{15-3}} = 3,4 \text{ кг};$$

$$S_y(t)_2 = \sqrt{\frac{54}{15-3}} = 2,1 \text{ кг};$$

$$\vartheta_y(t)_1 = \frac{S_y(t)_1}{\bar{y}_1} = 6,9\% ;$$

$$\vartheta_y(t)_2 = \frac{S_y(t)_2}{\bar{y}_2} = 5,9\% ;$$

Из этих коэффициентов колеблемости (волатильности) вычислим среднюю взвешенную на знаменатели, то есть на  $\bar{y}$ , имеем:

$$\vartheta_y(t)_2 = \frac{\sum_{j=1}^2 \vartheta_y(t)_j \times \bar{y}_j}{\sum_{j=1}^2 \bar{y}_j} = 6,4 \text{ \%}.$$

Прямое вычисление по совокупности в целом:

$$S_y(t)_A = \sqrt{\frac{278}{15-3}} = 4,81; \quad \vartheta_y(t)_A = \frac{S_y(t)_A}{\bar{y}_A} = 5,6 \text{ \%}.$$

Вычисление по формуле 6 через колеблемость (волатильность) единиц совокупности:

$$S_y(t)_A = 3,4^2 + 2,1^2 + 2 \times 3,4 \times 2,1 \times 0,53 = 23,14.$$

$$S_y(t)_c = 4,81$$

то есть точно совпадает с прямым расчетом, где

$$(r_{u_m u_p} = \frac{46}{\sqrt{7668}} = 0,53) \text{ связь колебаний прямая,}$$

средняя.

Коэффициент колеблемости (волатильности) по совокупности в целом на 0,8 пункта (или на 12,5 %) ниже, чем средняя из коэффициентов колеблемости (волатильности) по единицам совокупности [3].

Обратим еще раз внимание на то, что колеблемость (волатильность) по совокупности в целом будет меньше, чем средняя (взвешенная) из показателей колеблемости (волатильности) по ее единицам не только при прямой связи колебаний между ее единицами, но даже и при обратной связи колебаний, то есть при наличии общих причин колебаний, но при  $r_{u_m u_p} < 1$ , то есть при наличии хотя бы части независимых факторов колебаний. Таким образом, на конкретных примерах нами подтвержден закон повышения устойчивости при агрегировании признака в совокупности единиц и для нелинейных трендов [2].

Колеблемость (волатильность) объемного (суммируемого) признака совокупности в целом всегда меньше, чем средняя из аналогичных показателей колеблемости (волатильности) ее единиц (взвешенная по средним значениям, объемного признака), а показатели устойчивости – больше.

В нашем примере средний показатель устойчи-

$$(\vartheta_y(t)_j \times \bar{Y})^2 = \sum_{j=1}^k (\vartheta_y(t)_j \times \bar{Y} \times d_j)^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} (\vartheta_y(t)_m \times \bar{Y} \times d_m) \times (\vartheta_y(t)_p \times \bar{Y} \times d_p) \times r_{u_m u_p},$$

сократив все слагаемые на  $Y^2$ , и извлекая корень квадратный, получаем:

$$\vartheta_y(t)_c = \sqrt{\sum_{j=1}^k \vartheta_y(t)_j^2 \times d_j^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \vartheta_y(t)_m \times d_m \times \vartheta_y(t)_p \times d_p \times r_{u_m u_p}} \quad (9).$$

Обозначая величины текущего периода подписным значком «1», а базисного периода – значком «0», построим систему индексов:

1. Общий индекс коэффициента колеблемости (волатильности) объемного признака по совокупности в целом:

$$J_{\vartheta_y(t)_c} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^k \vartheta_y(t)_{j1}^2 \times d_{j1}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \vartheta_y(t)_{m1} \times d_{m1} \times \vartheta_y(t)_{p1} \times d_{p1} \times r_{u_m u_{p1}}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^k \vartheta_y(t)_{j0}^2 \times d_{j0}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \vartheta_y(t)_{m0} \times d_{m0} \times \vartheta_y(t)_{p0} \times d_{p0} \times r_{u_m u_{p0}}}} \quad (10).$$

вности уровней по единицам совокупности (взвешенный) равен  $100 \% - 6,4 \% = 93,6 \%$ , а показатель устойчивости уровней по совокупности в целом составил  $100 \% - 5,6 \% = 94,4 \%$ , то есть на 0,8 (или на 0,85 %) пункта выше. Различие в колеблемости (волатильности) и в устойчивости в «пунктах» одинаково по абсолютной величине, но противоположно по знаку, а в показателях темпов изменения в процентах, разумеется, разное, так как темпы исчисляются к разным базам.

При анализе изменения колеблемости (волатильности) и устойчивости в совокупности можно разграничить методом агрегатных индексов на три составляющие: 1) за счет изменения структуры, то есть распределения объемного признака между единицами совокупности; 2) за счет изменения колеблемости (волатильности) по каждой единице совокупности; 3) за счет применения тесноты связи между колебаниями признака у разных единиц совокупности. При этом «базисным» и «текущим» периодами нужно взять, как минимум, 9–11-летние ряды динамики (у нас 15-летние из 30-летних).

Чтобы провести индексный анализ, в качестве анализируемого общего признака-результата целесообразно взять коэффициент колеблемости (волатильности) по совокупности в целом  $\vartheta_y(t)$ . Абсолютный показатель  $S_y(t)$  зависит по величине от произвольно взятых единиц измерения признака, а для разных признаков несравним.

Чтобы преобразовать основную формулу (7) для коэффициентов колеблемости (волатильности), выразим среднее квадратическое отклонение  $S_y(t)$  через коэффициенты колеблемости (волатильности)  $\vartheta_y(t)$  и средние значения признаков, при этом имея в виду, что для идеальных величин признака среднее значение объемного признака равно значению его по совокупности в целом, умноженному на долю данной единицы в суммарном значении признака:  $\bar{y}_i = \bar{Y} \times d_p$ , и следовательно:  $S_y(t) = \vartheta_y(t)_j \times \bar{Y} \times d_j$  (8). Подставляя в (7), имеем:

В первую очередь индексируется доля единиц совокупности в объемном признаке (индексируемая величина выделена рамкой, цветом)

2. Индекс за счет изменения структуры объемного признака:

$$J_{\mathcal{G}_y(t)_c|d} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_y(t)_{j0}^2 \times d_{j1}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \mathcal{G}_y(t)_{m0} \times d_{m1} \times \mathcal{G}_y(t)_{p0} \times d_{p1} \times r_{u_m u_{p0}}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_y(t)_{j0}^2 \times d_{j0}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \mathcal{G}_y(t)_{m0} \times d_{m0} \times \mathcal{G}_y(t)_{p0} \times d_{p0} \times r_{u_m u_{p0}}}} \quad (11).$$

Затем следует индексировать влияние изменения колеблемости (волатильности) у отдельных единиц совокупности

$$3. J_{\mathcal{G}_y(t)_c|U_y(t)_j} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_y(t)_{j1}^2 \times d_{j1}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \mathcal{G}_y(t)_{m1} \times d_{m1} \times \mathcal{G}_y(t)_{p1} \times d_{p1} \times r_{u_m u_{p1}}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_y(t)_{j0}^2 \times d_{j1}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \mathcal{G}_y(t)_{m0} \times d_{m1} \times \mathcal{G}_y(t)_{p0} \times d_{p1} \times r_{u_m u_{p0}}}} \quad (12).$$

Наконец, индексируется изменение связи между колебаниями признака по парам единиц совокупности (эффект агрегирования)

$$4. J_{\mathcal{G}_y(t)_c|r_{u_m u_{p1}}} = \frac{\sqrt{\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_y(t)_{j1}^2 \times d_{j1}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \mathcal{G}_y(t)_{m1} \times d_{m1} \times \mathcal{G}_y(t)_{p1} \times d_{p1} \times r_{u_m u_{p1}}}}{\sqrt{\sum_{j=1}^k \mathcal{G}_y(t)_{j1}^2 \times d_{j1}^2 + 2 \sum_1^{C_k^2} \mathcal{G}_y(t)_{m1} \times d_{m1} \times \mathcal{G}_y(t)_{p1} \times d_{p1} \times r_{u_m u_{p0}}}} \quad (13).$$

Проиллюстрируем эту методику на примере с двумя единицами совокупности (Оренбургской и Самарской областям).

Таблица 1. Анализ изменения колеблемости (волатильности) производства мяса на душу населения в Оренбургской и Самарской областях

Показатели		Периоды	
		1976–1990 гг.	1991–2005 гг.
Доли единиц совокупности в объеме признака Y	d1	0,61	0,58
	d2	0,39	0,42
Коэффициенты колеблемости признака Y	$\mathcal{G}_y(t)_1$	0,146	0,069
	$\mathcal{G}_y(t)_2$	0,069	0,059
Коэффициент корреляции колебаний	$r_{u_1 u_2}$	0,5	0,53

Общий индекс коэффициента колеблемости (волатильности) в совокупности составил:

$$\frac{\mathcal{G}_y(t)_{1c}}{\mathcal{G}_y(t)_{0c}} = \frac{\sqrt{(0,069 \times 0,58)^2 + (0,059 \times 0,42)^2 + 2 \times 0,069 \times 0,58 \times 0,059 \times 0,42 \times 0,53}}{\sqrt{(0,146 \times 0,61)^2 + (0,069 \times 0,39)^2 + 2 \times 0,146 \times 0,61 \times 0,069 \times 0,39 \times 0,5}} =$$

$$\frac{\sqrt{0,0016 + 0,0006 + 0,0010}}{\sqrt{0,0079 + 0,0007 + 0,0024}} = \frac{0,0566}{0,1049} = 0,5396,$$

или 53,96 %.

абс. изменение = - 4,83 пункта.

Изменение коэффициента колеблемости (волатильности) за счет долей единиц совокупности, то есть снижения доли той, которая имела более высокую колеблемость (волатильность) (№ 2):

$$J_{\mathcal{G}_y(t)_c|d1} = \frac{\sqrt{(0,146 \times 0,58)^2 + (0,069 \times 0,42)^2 + 2 \times 0,146 \times 0,58 \times 0,069 \times 0,42 \times 0,5}}{\sqrt{(0,146 \times 0,61)^2 + (0,069 \times 0,39)^2 + 2 \times 0,146 \times 0,61 \times 0,069 \times 0,39 \times 0,5}} =$$

$$\frac{\sqrt{0,0072 + 0,0008 + 0,0024}}{\sqrt{0,0079 + 0,0007 + 0,0024}} = \frac{0,102}{0,105} = 0,9714,$$

или 97,14 %.

абс. изменение = - 0,3 пункта.

Изменение коэффициента колеблемости (волатильности) за счет коэффициентов по единицам совокупности (например, прогресса технологий) составило:

$$J_{g_y(t), |g_y(t)|} = \sqrt{\frac{(0,069 \times 0,58)^2 + (0,059 \times 0,42)^2 + 2 \times 0,069 \times 0,58 \times 0,059 \times 0,42 \times 0,53}{(0,146 \times 0,58)^2 + (0,069 \times 0,42)^2 + 2 \times 0,146 \times 0,58 \times 0,069 \times 0,42 \times 0,5}} =$$

$$\sqrt{\frac{0,0016 + 0,0006 + 0,0010}{0,0079 + 0,0008 + 0,0024}} = \frac{0,0566}{0,10198} = 0,5550,$$

или 55,50 %.

абс. изменение = - 4,54 пункта.

Изменение коэффициента колеблемости (волатильности) по совокупности за счет изменения связи между колебаниями у ее единиц:

$$J_{g_y(t), |r_{mm\rho}|} = \sqrt{\frac{(0,069 \times 0,58)^2 + (0,059 \times 0,42)^2 + 2 \times 0,069 \times 0,58 \times 0,059 \times 0,42 \times 0,53}{(0,069 \times 0,58)^2 + (0,059 \times 0,42)^2 + 2 \times 0,069 \times 0,58 \times 0,059 \times 0,42 \times 0,5}} =$$

$$\sqrt{\frac{0,0016 + 0,0006 + 0,0010}{0,0016 + 0,0006 + 0,0009}} = \frac{0,0566}{0,0565} = 1,0018,$$

или 100,18 %.

абс. изменение = 0,01 пункта.

В базисном периоде эффект агрегирования колебаний составил:

$$g_y(t)_0 - \bar{g}_y(t)_{j_0} = 0,1049 - 0,146 \times 0,61 + 0,069 \times 0,39 = -0,0111 \text{ или } -1,11 \%$$

В текущем периоде эффект агрегирования составил:

$$g_y(t)_1 - \bar{g}_y(t)_{j_1} = 0,0566 - 0,069 \times 0,58 + 0,059 \times 0,42 = -0,0082 \text{ или } -0,82\%.$$

Таким образом, общий индекс эффекта агрегирования:

$$J_{э.а.} = \frac{э.а._1}{э.а._0} = \frac{g_y(t)_1 - \bar{g}_y(t)_{j_1}}{g_y(t)_0 - \bar{g}_y(t)_{j_0}} = \frac{-0,0082}{-0,0111} = 0,7387;$$

абс. изменение = -0,0029 или -0,29 пункта.

Эффект агрегирования вырос на 73,87 % или 0,29 пункта (не забудем, что эффект всегда величина отрицательная, а ее прирост может быть и положительным и отрицательным). Уменьшаемое в формуле (13), как уже показано, зависит от трех параметров: 1) долей единиц совокупности в итоге объемного признака; 2) коэффициентов колеблемости (волатильности) по отдельным единицам совокупности; 3) коэффициентов корреляции отклонений от трендов по парам единиц совокупности. Вычитаемое – средняя величина из коэффициентов колеблемости (волатильности) единиц совокупности, понятно, зависит только от двух

первых факторов. Следовательно, и эффект агрегирования, как разность, тоже зависит от указанных трех факторов.

Подводя итог проведенному исследованию агрегирования волатильности (изменчивости) можно с уверенностью отметить ее снижение в совокупности, что имеет как научную в статистической методологии познания значимость, так и практическую – в системе государственного регулирования агропродовольственного рынка Российской Федерации, а также торговых взаимоотношений партнеров в мире, в том числе и таможенных союзах.

### *Литература*

1. Афанасьев, В.Н. Развитие системы методов статистического исследования временных рядов / В.Н. Афанасьев // Вестник НГУЭУ. – 2012. – № 1. – С. 10–24.
2. Афанасьев, В.Н. Статистическое обеспечение проблемы устойчивости сельскохозяйственного производства. – Москва: Финансы и статистика, 1996. – 320 с.
3. Афанасьев, В.Н. Формирование устойчивого агропродовольственного рынка в Российской Федерации: статистические исследования / под ред. проф. В.Н. Афанасьева. – Москва: Финансы и статистика, 2008. – 288 с.
4. Афанасьева, А.В. Статистическая оценка динамики производства сельскохозяйственной продукции в системе государственного регулирования продовольственного рынка: диссертация ... кандидата экономических наук: 08.00.12 / А.В. Афанасьева. – Самара, 2008. – 250 с.
5. Вайну, Я.Я.-Ф. Корреляция рядов динамики / Я.Я.-Ф. Вайну. – Москва: «Статистика», 1977. – 119 с.
6. Гуляева, Т.И. Методика статистического анализа динамики урожайности с учетом качества продукции / Т.И. Гуляева, М.М. Юзбашев // Вестник статистики. – 1984. – № 4. – С. 55–59.



7. Лебедева, Т.В. Статистические методы прогнозирования урожайности зерновых культур в зоне рискованного земледелия: диссертация ... кандидата экономических наук: 08.00.12 / Т.В. Лебедева. – Оренбург, 2004. – 169 с.

8. Четвериков, Н.С. Статистические и стохастические исследования / Н.С. Четвериков. – Москва: ГОССТАТИЗДАТ, 1963. – 300 с.

9. Четыркин, Е.М. Вероятность и статистика / Е.М. Четыркин, И.Л. Калихман. – Москва: Финансы и статистика, 1982. – 319 с.

10. Юзбашев, М.М. Статистический анализ тенденций и колеблемости / М.М. Юзбашев, А.И. Манелля. – Москва: Финансы и статистика, 1983. – 207 с.